

# A matematikában tehetséges tanuló.

## Bevezetés.

Mindennapi tapasztalat, hogy a matematikában is, mint minden tárgyban vannak pozitív értelemben vett kiváló tanulók. E kiváló tanulók némelyikét *tehetségesnek* ismerjük fel. Felvetődik a kérdés: mi a nevelő feladata a matematikában kiváló, tehetséges tanulókkal szemben?

A nevelési tennivalók tisztázása előtt meg kell vizsgálnunk a következő kérdéseket: *Mi jellemzi a matematikában tehetséges tanulót? Mi a kapcsolat az iskolai és az igazi tehetség között?*

A magyar irodalomban nemrég jelent meg Márkus Artúr bizonyos tekintetben úttörő munkája: *A matematikai képesség lélektana.* (Szeged, 1937.) Mégis úgy gondolom, hasznos az is, ha valamit több oldalról világítunk meg. Ezenkívül szeretném felhívni a figyelmet a nevelési tennivalókra is, illetve a tennivalók módjára.

## A matematikában tehetséges tanulók jellemzése.

*(Ahogyan a középiskolai tanulók látják.)*

A matematikai tehetség fogalmának tisztázása a közvéleményben elterjedt fogalom vizsgálatával indulhat el. Nem érdektelen a lélektan számára sem valamilyen lelki jelenségnek, képességnek a közvéleményben kialakult képe, fogalma, mert csak e kép ismerete után foghat hozzá a fogalom tisztázásához a közvélemény számára is. Tehát nem látszik teljesen érdektelennek, ha azt vizsgáljuk, hogy a matematikában tehetséges tanulónak, illetve ezzel kapcsolatban a matematikai tehetségnek, milyen képe alakult ki a közvéleményben? Sok embert megkérdezni nagyobb akadályba ütközik, de nem is szükséges.

A matematikai tehetségről legtöbb ember nyilván az iskolában szerez fogalmat. Az itt nyert fogalom lényegesen legtöbbször nem változik, nem fejlődik, nem differenciálódik, nyilván az életkörülmények miatt. Így közelfekszik az a gondolat, hogy a matematikai tehetségnek a tanulóknál kialakult képét kell vizsgálnunk. Hiszen a tehetség, így a matematikai tehetség is, szinte mindennapi problémája a középiskolai tanulóknak. A tanuló állandóan ellenőrzi a matematikában tett erőfeszítéseit, sikereit és sikertelenségeit. Megismeri erejét,

képességeit. Az iskolai osztály, mint a normális fogalmának legjobban kialakító tényezője, megismerteti a tanulót esetleg nála jobb, vagy rosszabb matematikussal. Így a matematikai tehetség képe legtöbb tanulónál folytonosan kiegészül és tisztul.

Én is középiskolai tanulóknál igyekeztem megvizsgálni a matematikában tehetséges tanulókról kialakult képet.

A debreceni ref. kollégium gimnáziumának VII/a, VII/b, VIII/a, VIII/b osztályainak — több más kérdést megelőzőleg — a következő két kérdésre kellett válaszolniuk írásban:

1. *Milyennek képelem el a matematikában tehetséges tanulót?*

2. *Miből é-f hogyan lehet megállapítani egy tanulórol hogy matematikában tehetséges?*

Megjegyzem, hogy a második kérdést az első kiegészítésének szántam, mivel módszertani utasításokat a tanulóktól nem várhatunk, habár, mint látni fogjuk, több tanulónál ez is megtalálható. Legtöbb tanulónál a második kérdés az első elmélyítésére, kiegészítésére szolgált, némelyek a második kérdésnél felelet helyett az első feleletre utaltak.

A két kérdés kidolgozására összesen 10—15 perc jutott. Főleg más kérdésekre tekintettel, *névalírás nélkül* adattam be a feleletet. A kérdésekre a négy osztály 142 tanulója felelt. A feleletek több mondatból állanak s több dologra vonatkoznak. Ezért minden feleletet több részfeleletre bontottam fel. Így a 142 feleletből 680 részfelelet adódott. Így nem azt vizsgáltam, hogy a tanulók hány százalékának van helyes fogalma a matematikai tehetségről, illetve hányan sorolják fel a matematikai tehetség lényeges jegyeit, mert nyilvánvaló, hogy egyik ezt vagy ezeket a tulajdonságokat emeli ki, a másik más jegyeket, de ezek a jegyek egymást kiegészítve általános képpé rendeződhetnek. Ezért bontottam fel az egyes feleleteket részfeleletekre, ami azzal a hátránnyal járt, hogy az ok és cél hálózatot több helyen fel kellett bontanom. De arra ügyeltem, hogy újabb kapcsolatokat ne teremtsék. A feleleteket úgyszólván mindenütt szórói-szórá közlöm. Minden részfelelet után zárójelbe tettem, hogy ez a részfelelet hányszor fordul elő a részfeleletek között. Megjegyzem még, hogy kézzelfogható tévedések úgyszólván nincsenek a feleletek között.

Első kérdés, ami felvetődhetik, hogy *a matematikában tehetséges tanuló különbözik-e más tanulótol?* Ezen nagyon kevesen gondolkoznak, mindenki az *igent* természetesnek tartja. Idetartozó feleletek: a matematikai tehetség igen ritka, ha az osztályban előfordul, viselkedésében kissé elkülönül (1), a külső nem számít (1), külsőleg nincs különbség, csak belsőleg (1).

Hogy *a tehetséget fel lehel-e ismerni*, arra az egyik tanuló ezt mondja: biztos jelek nincsenek, vagy csak a lélektani

tudósok számára hozzáférhetők, de a számomra nem.” (1).

Hogy *miből lehet megállapítani a tehetséget*, arra többféle formális feleletet is kapunk:

A tehetséget meg lehet állapítani az évi átlagból vagy nagyobb átlagból, de nem egy feladatból (1), a tanuló munkájának eredményéből (1), megállapítható a rátermettségéből (1), iskolai viselkedésből (1), esetleg az érdeklődésből (1), beszédből (1), feleletből (1), dolgozatából és feleletéből (1), magyarázatából (2), adott nehézséggel szemben hogyan viselkedik (2), gondolkozásinódjából, gondolatmenetéből (3), felfogó képességéről (1), levezetésekből (1), a gondolat gyakorlati megvalósításából (1), ábrák megrajzolásából (1).

A fentiekből *hogyan állapítjuk meg a tehetséget*, arra a következő feleletek válaszolnak:

Feladunk neki egy feladatot (1). feladunk neki egy képletet s miután a szükséges kiindulást megadtuk (könnvebbné! még ezt sem!), felszólítjuk, hogy vezesse le; ha levezeti, tehetséges, ilyenkor megvillan fejében a levezetés menete s ezt mondja el először, csak azután kezd a kidolgozáshoz (1), olyan feladatot adunk neki, melyet senki sem magyaráz meg, s ehhez hasonlót soha nem csinált (1), akkor tehetséges, ha a többféleképpen megoldható példánál megtalálja a legjobb és legrövidebb utat (1).

hogy *ki a tehetségtelen*, arra vonatkozólag direkt megjegyzést csak egyet találtam: aki csak bevágja, s ha mélyebbre akarunk nézni, összezavarodik: nem tehetséges (1).

Hogy *a matematikai tehetség mire vezethető vissza, öröklött-e vagy szerzett*, arra a következő feleletek vonatkoznak:

A matematikára születni kell (1), a matematikus magával hozza az őstermészetben a kifogástalan gondolkozásmódot (1), a matematikához külön tehetség kell (2), érzék kell (3), rátermettség (1), természetes érzék kell a matematikához (1), hiába a törekvés, ha nem érti (1), a szorgalomnál fontosabb a tehetség (1), akiben nincs szorgalom, az is lehet tehetséges (1).

A másik felfogás szerint a matematikai tehetség nem olyan, mint a költői tehetség, mely velünk születik, hanem, melyet hosszabb tanulás árán lehet elsajátítani (1), a matematikára nem kell születni, sokat kell gyakorolni, mert nagyrészt gyakorlaton alapszik (3).

A *felelésmódra* vonatkozólag megjegyzem, hogy a konkrét személyek megnevezése, vagy leírása és a színtelen általános tulajdonságok felsorolása ritkán fordul elő.

Majdnem minden osztályban volt olyan tanuló, aki behatóan és sikeresen foglalkozik a matematikával. Több helyen ők szolgáltak mintaképül, így az egyik osztályban a matematikában tehetséges tanulót külsőleg is leírják (2). meg is nevezik (7); a másik osztályban ketten is megjegyzik.

hogy olyannak képzelik el a matematikában tehetséges tanulót, mint X-et és Y-t, de az egyik megjegyzi, hogy X-et tartja igazán annak, mert Y mindenben kiváló.

Ezek előrebocsátásával a többi feleletekből az állapítható meg egész határozottan — ami természetes is — hogy *a matematikában tehetséges tanulót elsősorban a matematikához való viszonya, abban elért eredményei, munkamódja jellemzik*, illetve különböztetik meg másoktól. Legfeltűnőbb különbség van a matematika iránti érdeklődésben, a matematika megértésében, áttekintésében, egyszerű alkalmazásában, de különösen az új, ismeretlen probléma megoldásában. — Bizonyos mértékig különbség van az egész lelki szerkezet terén, az egyéniség terén is. De meg kell jegyezni, hogy minél inkább távolodunk a matematikával való kapcsolattól, s minél inkább közeledünk a jellem, a személyiség megrajzolásához, annál több ellentmondás, ellenkező vélemény található.

Úgy igyekeztem összeállítani a feleleteket, hogy minden felelet szerepeljen, a pozitív irányban kiváló feleleteket is természetesen felvettem, amelyek ha nem is a közvéleményt, az átlagot, a sablont fejezik ki, de rámutatnak a felelet közben felvetődő értékesebb gondolatokra is. *A matematikában tehetséges tanulót jellemzi a matematika iránti speciális beállítottság:*

A matematikában tehetséges tanuló elemébe jön, ha a matematikáról van szó (1), mintha kicserélték volna (1). öröm ragyog az arcán (1). Érdeklődik minden után, ami számolásra alkalmas (1), érdeklődik az új anyag iránt (2), a levezetések s azok összefüggései iránt (1), a magasabb matematika iránt (1), általában a matematikai tárgyak iránt (3). A matematikában tehetséges tanulót erősen (20), sőt legerősebben a matematika érdekli (6). Érdekli egész órán (1), érdeklődött a múltban is (1), érdeklődött már kis korában is (2). Nemcsak érdekli, hanem iskolán kívül is úgyszólván mindig vele foglalkozik (15), mégpedig szívesen (19), a matematikai könyveket szereti (1), és olvassa (8), matematikai szaklapokat olvas (2), mindig matematikai kérdésekben töri a fejét, mert benne örömet leli (5), ezeket a kérdéseket vagy mások nem oldották meg, vagy maga adja fel magának (2), önkéntelen gondolkozóba esik minden matematikai problémán (1), házi versenyeken vesz részt (1), eljár a matematikai összejövetelekre, hogy egymástól tanuljanak (1), általában autodidaktizmus jellemző rá (1), több tudásra törekszik, ezért műveli magát (2), foglalkozik a matematikával, hogy fejlessze magát a gyors gondolkodásban és számolásban (1), s azért, hogy ismereteit fejlessze (1). Az a tehetséges matematikus, aki a matematikát önmagáért szereti (1). A tehetséges matematikusra annyira hat a matematika, hogy legtöbb gondolata a matematika körül forog (1),

minden papírszeletre levezetést ír és geometriai ábrát rajzol (1), állandóan a matematikáról beszél és beszédébe matematikai szavakat kever (5), ilyenkor előhozakodik egy új megoldási elmélettel (1), a környezetében, mindenben számolási lehetőséget lát (5), mindenben igyekszik matematikai törvényszerűséget felfedezni (1), mindent számítással végez (1). mindent, ami körülötte történik, matematikus módra ítél meg (1).

*összefoglalva: A matematikában tehetséges tanuló erősen érdeklődik a matematika iránt, még az iskolán kívül is. mindig szívesen foglalkozik vele s annyira beleéli magát, hogy mindenben matematikát lát.*

*De nem elég az érdeklődés, a matematikát tudni is kell.* Mindennek a számolás az alapja:

A matematikában tehetséges tanuló fejben és írásban tud számolni (1), jó számoló (3), gyors fejszámoló (1), könnyen (2), és biztosan számol (2), nagy számolási készsége van (4), kitűnő számolótehetség (1).

A matematikai művelethez kellő alap kell (3). A matematikában kiváló tanuló az iskolai anyagot tudja (2), az iskolai anyagot meghaladó tudása van (2), társainál sokkal többet tud (8), az anyagban otthon van (4), a legegyszerűbbtől a legbonyolultabbakig mindent tud (3), az anyag vérében van (2), a tudását értéssel, könnyedén szerzi meg (6). Van, aki megjegyzi, hogy a matematikában tehetséges tanulónak elég a levezetés elejét megjegyezni, mert a többi eszébe jut (1). Amit évekkal ezelőtt tudott, azt sem felejt el (4), az eddigi anyagról szóban és írásban egyaránt be tud számolni (5), tudása az állandó jelentkezésből is látszik (1), a képleteket és levezetéseket fejben tartja és jól tudja (2). A kérdésekre természetesen jön a felelet (1), felelete alapos, meggyőző (1), értelmes (1), kimentő (1), pontos, precíz (4), egyszerű, mert minél alaposabb, annál egyszerűbb (1), szabatos (1), nvugodt, fölényes (1), gyors, határozott, jó (1), azonnal felel (1), felelésben találékony (1), észszerűen, fejben tud levezetni (1), a levezetést meg tudja oldani (2). Általában tudása biztos (2), bármikor készen áll (2), nagy áttekintése van az egész anyag felett (3).

De nem csak tudja, hanem mindenki számára érthetően meg is tudja magyarázni (7).

*Összefoglalva: Jó számoló készsége van, társainál többet tud, tudása teljes és biztos, feleletei pontosak, magyarázata egyszerű.*

*Az órán az új anyag tárgyalásánál tűnik ki legjobban valakinek a tehetsége:*

Az órán figyelmes (3), az új anyagtól nem ijed meg, gondolkodik rajta (1), hamar feltalálja magát (1), az új anyagot egy-kettőre kitalálja (3), a magyarázatot tudja követni és megérti (8), legfőbb jellemzője, hogy a legnehezebbet is

könnyen és gyorsan megérti (32), a levezetést nemcsak érti, hanem kitalálja a lépéseket (7), előre eltervezi (1). A matematikai könyveket segítség nélkül is megérti (1), a hiányos magyarázatot is megérti (1). A szabályt meg tudja fogalmazni (2), és érthetően megmagyarázza az eredményt (2).

Az új anyag tárgyalásánál a tanárnak állandóan segít (4), tanácsával nagyban hozzájárul az eredményhez (1), gyors felfogásával hamar észreveszi a hibát (2), de nem elégszik meg a magyarázattal, hozzászólásai vannak (1), mindig újabb kérdéseket vet fel (3), kérdései hozzáértést árulnak el (2).

*Összefoglalva: Az új anyagot könnyen és gyorsan megérti, értelmes tanácsaival a megoldást előre viszi.*

Tudását helyesen (2), és bármikor tudja alkalmazni (3).

*A matematikában tehetséges tanulót az új problémákkal szemben a következők jellemzik:*

A feladatot hamar átgondolja és megérti (1), a nehézséget rögtön felismeri (1), nem riad vissza (1), meglátja a feladat lényegét (2), gondolkodik rajta (4), a bonyolultakon töpreng (2), nem nyugszik, míg meg nem oldja (1), mert fizikai fájdalmat érez, ha nem tudja megoldani (1), így gondolkodással és próbálgatással rájön a megoldásra (1), mégpedig önállóan (4), gyorsan (5), és könnyen (2), felismeri a legjobb, legrövidebb utat (1), de nem tanult módszerrel is megtalálja a kivezető utat (1), esetleg, ha az irányt tudja, akkor — ha nem is a leghelyesebb, — de olyan megoldást talál, melyből a tehetsége meglátszik (1).

Így a legnehezebb problémát is megoldja (10), okoskodással és ismereteinek felhasználásával (2), vagy saját elgondolásai alapján (2), önállóan (7), vagy kis segítséggel (4), hibátlanul (1), legegyszerűbben (7), sajátosan praktikusán (1), könnyen és gyorsan (1), fölényesen (1), az eredményből sokirányú következtetést tud levonni (1), a megoldást meg is tudja magyarázni (4).

Ha a feladat nem sikerül, nem jön zavarba (1), ha kell, napokig dolgozik rajta (1).

Munkája közben észére támaszkodik (1), következtetése helyesek (5), egyszerűsítésre törekszik (1), munkájában nyugodt (1), legapróbb részletekig pontos (1), precíz, szép kiállítású (1).

Van türelme a matematikához (1).

Önálló ötletei vannak (6), van invenciója (2), a feladat kidolgozásához kiváló érzéke van (2).

A részlegesből el tudja vonni az általánost (1), szeret elmélyedni (1), az anyaggal kapcsolatban helyes és önálló nézetei vannak (5), szeret a matematikán vitatkozni (1).

Így ő is próbál bizonyos műveleteket készíteni (1), amit már más felfedezett, anélkül, hogy tudna róla, ő is felfedezi (1), állandóan kutat és föltalál valamit (1), magasabb kombinációra képes (1), általában önálló munkára képes (1).

*Összefoglalva: Új és nehéz probléma megoldását is megtalálja, és a problémát önállóan, könnyen és gyorsan megoldja. Önállóan is vet fel és old meg problémákat.*

Ezzel a matematikában tehetséges tanulónak a matematikával való kapcsolatát ki is merítettük. Még ehhez csatlakozik egy részfelelet: a matematikában tehetséges tanulónak jó térszemlélete van (1).

A következő terület, melyen a tanulók szerint meglátszik a matematikai tehetség határa, elsősorban az értelem területe. Valószínűnek látszik, hogy pl.: „jól tud gondolkodni, következtetni”, „éles esze van” stb. kifejezést — ha nem is mondják a tanulók — a matematika területére vonatkoztatják. Vannak, akiknél jól kivehető, hogy más területről van szó.

Ahol nincs nyilvánvaló célzás a matematikára, ott *a lelki képességeket külön vettem s a következőkben foglalom össze:*

Minden eredményt figyelemmel kísér (1), figyelme élénk (1), éles (2), jellemzi a teljes koncentráció (1).

Különösen jellemző a gyors felfogóképesség (26), könnyű (6), jó (8), sőt kitűnő felfogóképessége van (1), felismerőképessége tökéletes (1), képes a legelvontabb fogalmakat is [elismerni (1).

Emlékezete nagy (1), jó (3), sőt kitűnő (4).

Szorgalmasan és rendszeresen tanul (4).

Képzelete igen nagy (1) és gyors (1).

Gondolkozására jellemző, hogy az összefüggést, kapcsolatot meg tudja keresni (2), felismeri (5), s megérti (1). A lényegét ki tudja választani (3). Gondolkozása logikus (16), önálló (2), helyesen következtet (5), gondolkozása rendszeres (2), tartalmas (1), reális (1), mély (1), komoly (2), pontos (1). józan (1), gyors, eleven, friss (6), nyugodt (1), megfontolt (3).

Általában gondolkozó (3), mindig gondolkodik (1), szeret gondolkodni (1), megfontoltan ítél (1), van ítélőképessége (1). Általában nagy gondolkozási tehetsége van (V). Általában jó eszű, értelmes (2), okosabb, mint a többi (3), éleseszű (8), nagy értelmi fejlettsége és fogékonysága van (6).

A többi vonások széteszlanak a lelki jelenségek különböző területein. Részben *az egyéniségre jellemző tulajdonságok:*

Mindig okosan cselekszik (1), előrelátó (1), önálló (1), céltudatos (2), találékony (5), élelmes (1).

Inkább az értelem, mint a gyakorlat embere (1), gyakorlati (5), nincs érzéke a gyakorlathoz (1), elméletben, gyakorlatban önálló (1), minőségre, helyességre törekszik (1), sokszor egyoldalú (1), az érzelmek kevésbé hatnak rá (1).

Általában komolv (1), nyugodt (4), megfontolt (6), pontos (11), alapos (3), határozott (1), elmélyedő (1), szórakozott (3), mértéktartó (1), van akarata (2), egyenes (1),

egyenes, korrekt jellem (1), vidám optimista (1), nem szeret sokat beszélni (1), társaságkerülő (2), beszéde választékos (1), gyors (1), állandóan gesztikulál (1), szelíd, engedékeny (1), van hencgő is (1), kicsinyeskedő (2).

Ezeknek a jelzőknek a jelentőségét nem igen lehet felmérni.

Az *értelmi területre* vonatkozó megjegyzésekből a következő jól kivethető:

*Mindent könnyen, gyorsan megért, gondolkozása logikus, általában éles eszű.*

A többi megjegyzésekben aránylag a *komolyság* és *pontosság* fordul elő legtöbbször.

Végül még megemlékezem *a más tárgy iránti érdeklődésről*. Mint fentebb láttuk, megoszlanak a vélemények a felett, hogy vajjon elméleti vagy gyakorlati ember-e a matematikában tehetséges tanuló:

Főleg a reális tárgyak iránt érdeklődik (2), érdeklődik a természettudományok iránt (1), szeret fizikával foglalkozni (2), érdeklődik a rádió és a telefon iránt (1), rádiót és kisebb készülékeket készít (1), foglalkozik villanszereléssel (1), nemcsak a matematikával foglalkozik, hanem érdeklí a grafológia, hipnotizálás, s más lelki jelenség (1), a matematika szárazságát zenével és szellemes tréfálgatással enyhíti (1).

Azon vitatkoznak, hogy *a matematikában tehetséges tanuló más tárgyból milyen eredményt ér el*.

Minden más könnyű (1), másból is jó, mert a matematika az észet élesíti (1), legalább is másból sem gyenge (1).

Másból lehet gyenge, mert a matematikát nem magolni, hanem érteni kell (3).

Érdekes, hogy az egyik osztályban van egy kiváló matematikus, aki másból gyenge. Ez a tény erősen hat egyesek szemléletére: latinból, görögből nem tud semmit (1), lehet gyenge más tárgyból, részint az elfoglaltsága miatt (7).

Ezzel a feleletek végére értünk. A feleletek eloszlásához néhány statisztikai megjegyzést fűzök:

Mint fentebb említettem, 142 tanuló feleleteit 680 részfeleletre osztottam. A részfeleletek 18%-a a matematika iránti érdeklődésre, 11%-a a matematika-tudásra, 11%-a megértésre, 17%-a az alkalmazásra, új problémák megoldására vonatkozik. Nem kifejezetten a matematika területére vonatkozó értelmi tevékenységekre 21%, az egyéniségre 10%, más tárgy iránti érdeklődésre pedig 4% vonatkozik.

Ha nem a részfeleletek arányát, hanem a tanulók számarányát nézzük, akkor azt találjuk, hogy a tanulók 51%-a említi meg a matematika iránti *érdeklődést*, részben mint ismertető jelet, részben mint szükséges előfeltételt. Ugyancsak 51% a *megértéssel*, főleg a *gyors felfogással* foglalkozik. A tanulók 42%-a említi meg az *új problémával való sikeres fog-*



*lalkozást, illetve a tanulók 61%-a tesz említést a matematikában tehetséges tanuló önállóságáról s minden akadályon könnyen felülemelkedő atkivításáról.*

Mégegyszer foglaljuk össze a matematikában tehetséges tanuló képének a fejeletekből adódó főbb vonásait:

A matematikában tehetséges tanuló erősen érdeklődik a matematika iránt, vele mindig szívesen foglalkozik s any-nijira beleéli magát, hogy mindenben matematikát lát. Jó számoló-készsége van, társainál többet tud, tudása teljes és biztos, fejelete pontos, magyarázata egyszerű. Az új anyagot könnyen és gyorsan megérti, értelmes tanácsaival a megoldást előbbre viszi. Az új és nehéz probléma megoldását is megtalálja és a problémát önállóan, könnyen és gyorsan megoldja. Önállóan is vet fel és old meg problémákat. Általában éles eszű, mindent könnyen és gyorsan megért, gondolkozása logikus. Komoly és pontos.

Mindezek elismertetik velünk, hogy a tanulóban, mint a közvélemény hordozóiban, a matematikában tehetséges tanuló aránylag helyes kép alakult ki. De mielőtt ennek a képnek a vizsgálatába kezdenénk, meg kell keresnünk e vizsgálatához az alapokat. Mi a matematikai tehetség? Mik a lényeges jegyei? Van-e köze az igazi matematikai tehetségnek a középiskolai tehetséghez? Használhatjuk-e itt ezt a fogalmat, hogy „tehetség”, s mit értünk rajta? Tehát vég-eredményben meg kell vizsgálnunk az igazi matematikai tehetség és az iskolai tehetség közti viszonyt s ennek alapján megállapítani a matematikában tehetséges tanuló tehetségének lényeges jegyeit.

E probléma tökéletes megoldására nem vállalkozom. Csak egy-két gondolattal szeretnék hozzájárulni a kérdések megvilágításához.

### **A matematikai tehetség és a középiskolai tanuló.**

*Matematikában tehetségesnek általában azt nevezzük, aki az átlagon felüli teljesítményre képes. Szűkebb értelemben azt az embert ismerjük el matematikában tehetségesnek, aki önálló gondolattal, munkával jelentősen gazdagítja a matematika tudománvát. Tehát eredetiségükkel és értékükkel az átlag fölé emelkedő alkotások alapján mondunk valakit tehetségesnek. Ilven esetben a tehetség szót diagnosztikus értelemben használjuk. De használjuk prognosztikus értelemben is: aki már egy vagy több értékes matematikai vizsgáldást végzett, feltevésünk szerint a jövőben is képes lesz rá, A. tehetséges emberre jellemző produktivitás vonatkozhatik pl. a matematika alapjainak mélyebb megismerésére, a matematika valamely új ágának megteremtésére, ez új ág módszereire, vonatkozhatik már ismert ágak fejlesztésére stb. Annál*

*tehetségesebb valaki, minél önállóbb és átfogóbb értékűek gondolatai, művei.*

*Miért jutnak egyesek értékes eredményhez, mások miért nem?* hogy ez nem a véletlen műlik, bizonyítja az, hogy átlagember még soha nem jött rá mélyebb matematikai igazságra. De az is nyilvánvaló, hogy a szorgalom, a nagy akarat sem elég az eredmény eléréséhez. Általában *sok tényezőnek kell közreműködnie, hogy önálló alkotás jöjjön létre.* É tényezők közül több megtalálható más embernél is, de a többi tényező, ami ezeken felül épen a matematikai produktívitás-hoz szükséges, másoknál vagy hiányzik, vagy csak kisebb mértékben van jelen, mint a matematikában tehetséges embernél, így produktívva csak az lehet, akiben ezek a tényezők is fokozott mértékben megvannak, tehát akinek matematikai tehetsége van. A matematikai tehetség a képességek bizonyos összességét jelenti. (Gyakran a *matematikai tehetség* szót a *tehetséges matematikus* szó helyett is használjuk.)

Ugyanazon névvel jelölt lelki képességeink különböző területen nyilatkozhatnak meg. A közös név nem azt jelenti, hogy egyik területen mindig ugyanolyan mértékben nyilatkozik meg a képesség, mint a másokban. A harmonikus tehetséggel szemben speciális tehetség is fejlődhet ki.

Tehát a matematikai tehetség olyan képesség, vagy képességek összessége, melyek hiányában az alkotás lehetetlen.

*Mi közelebbről ez a matematikai tehetség?*

A matematikai tehetség természetének vizsgálata elindulhat a matematika lényegének vizsgálatával.

*A tiszta matematika* — mint azt *Dávid Lajos* rövid áttekintésében olvassuk (5; 240\*) — *a formális rend és mérték tudománya.* A tiszta matematika bármely tétele végeredményben a természetes számoknak egy vagy több tétele. A természetes számból tisztán formálisán nyeri a többi számtartományt a matematika. A formális törvények permanencia elvét szem előtt tartva általánosít. Alapfogalmai még a sokaság, csoport, határérték, függvény, kombináció, permutáció. Módszere a dedukció és a matematikai indukció. A matematika az absztrakt számra épült absztrakt tudomány. A geometria az alkalmazott matematika első ága: a szám térbeli alakká, helyzeté, kiterjedéssé konkretizálása.

Ezek alapján így fogalmazhatnánk meg a matematikai tehetséget: *érzék a formális rend és mérték iránt.* Ez érzék birtokában képes az ember az alapfogalmak segítségével a matematika módszereivel a matematika rendszerét továbbfejleszteni.

A tiszta matematika axiomatikus jellegét tartva szem előtt, alkotta meg *Wenzl* (31; 29) az egyik tehetség típusát, melvre az *üres formában gondolkodás jellemző*, továbbá az *absztrak-*

\* Az első szám a forrásmunkát, második a lapszámot jelöli

*ció-erő és a signitiv gondolkodás nagy teljesítménye.* E típus képviselője a matematikai tehetség.

A matematika iránti érzékre mutat rá *Poincaré* (21; 126) is, mikor azt mondja, hogy a matematikai bizonyítás nem egyszerű egymásmellé helyezése a szillogizmusoknak. Ezek a szillogizmusok bizonyos rendben helyezkednek el. Ez a rend fontosabb, mint maguk az elemek. A matematikában tehetségesnek eziránt a rend iránt van érzéke, s így minden elem önmagától helyezkedik el abba a keretbe, mely számára készült. *Ez az érzék — mint Poincaré szavaiból kivethető — a matematika legátfogóbb szerkezetének ismerete, a matematika lényegének ismerete.*

*Legtöbben a számviszonyokban megnyilatkozó rend iránti érzékben látják a matematikai tehetség lényegét.*

A matematikai tehetség lélektani megvilágítására az *alkotás lélektani folyamatának vizsgálata* adhat felvilágosítást.

*Fehr* (8.) korának legnagyobb matematikusaihoz intézett körkérdést, (7). *Ziehen* minden német fizika és matematika docenshez. (9.) Mielőtt *Ziehen* vizsgálatainak eredményét közölném, megjegyzem a következőket: a matematikai produktivitáshoz szükséges tényezők közül egyelőre a *speciálisan matematikait* vesszük figyelembe. Arra vonatkozólag, hogy a matematika minden terének eredményes kutatásához ugyanazon tehetség szükséges-e vagy sem, arra vonatkozólag megoszlanak a vélemények. Általában a matematikai tehetség két irányát szokták megkülönböztetni: a *tiszta matematikait* és a *geometriait*.

A matematika és a geometria is definíciókkal dolgozik, igazságot állapít meg és az igazságot bizonyítja. Tehát ehhez a tevékenységhez szükséges a fogalomalkotás, ítélet és következtetés. Továbbá minden gondolkozási folyamat végrehajtására szükséges bizonyos ismeret befogadása, s ez ismeret önálló előállítás, kialakítása. Mindezeket összekapcsolva készzen áll előttünk a matematikai tehetségnek *Ziehen* által talált szerkezete, melvet több évtizedes munkája alapján állított össze. *Ziehen* (9; 43) szerint *a matematikai tehetség négy komponensből tevődik össze: a) térbeli, b) logikai, c) számo-lási, d) szimbolikus komponensekből.*

A matematikai tehetség szerkezete tehát a következő:

A) *Térbeli összetevők:*

1. Térbeli alakfelfogás, speciális vonatkozással a törvényszerű, különösen kvantitativ is megállapítható helyzetviszonyokra.

2. Térbeli alakok iránti emlékezet.

3. Térbeli absztrakció (közös jegyek, relációk kiemelése).

4. Térbeli kombináció (térbeli relációk bonyolult összefüggéseinek felfogása, megtartása és önálló megtalálása).

5 *Logikai összetevők:*

1. Szemléletes és mindenekelőtt nem szemléletes, szí-

gorúan definiált fogalmak alkotása (háromszög, szinusz, logaritmus, tensor, függvény-determináns, sokaság stb.), tehát fogalmi absztrakció.

2. Általános fogalmi összefüggések felfogása, megfogalmazása, megtartása és önálló megtalálása, különös tekintettel a quantitative kifejezhető vagy quantitative kevésbé kifejezhető fogalmakra.

3. Következtetéseknek és következtetési soroknak felfogása, megtartása és önálló megalkotása a logika formális szabályai szerint.

C) *A számképzetek speciális alkotása* (számemlékezet, számolás).

D) *Szimbólumösszetevők* (szimbólumok felfogása, megértése, megtartása, műveletek a szimbólumokkal).

Megjegyzendő, hogy a B2 tartalmi, a B3 alaki természetű. A B3 ügyel a B2-re, nehogy logikai hibát ejtsen, de azért közvetlen is aktív, különösen az algebrai ismeretnél (9; 46).

*Ziehen* kérdőíveire 127-en feleltek. Ezek alapján *Ziehen* megvizsgálta, hogy a logikai-matematikai és a geometriai tehetség milyen gyakran jár együtt, milyen közöttük a korreláció. Azt találta, hogy a geometriai és a tiszta matematikai tehetség között erős korreláció van. A geometriai tehetségben is meg kell különböztetni a tiszta térbeli és logikai összetevőt (9; 56).

Számemlékezet és fejszámolás egyenlő gyakran jár együtt mind a geometriai, mind a tiszta matematikai tehetséggel. De mindegyikkel alacsonyabb a korreláció, mint a geometriai és a logikai-matematikai tehetség között. Fordítva, számemlékezettel és fejszámolással távolról sem jár mindig matematikai tehetség (9; 72).

A fentiekből láthatjuk, hogy *Ziehen* nemcsak a produktivitást tartotta szem előtt, mikor a matematikai tehetség szerkezetét vizsgálta, hanem a matematikai tevékenységhez tartozó összes szükséges tényezőket. Hogy melyiknek jut a tehetségnél lényegesebb szerep, arról nem világosít fel. Nyilván azt nevezi tehetségnek, aki a felsoroltak mindegyikére képes. Tehát e jegyek összeségének meg kell lenni a matematikai tehetségben. Tulajdonképpen azt mondja, hogy *az a tehetséges, aki képes matematikai igazságot megérteni, és önállóan megtalálni*. Hogy a különböző folyamatok hogyan folynak vagy hogyan folyhatnak le, arról nem kapunk felvilágosítást.

A fenti tényezők szükségesek a produktivitáshoz, de nem világítanak rá a produktivitás természetére. Akik megértik és megtartják a legbonyolultabb összefüggéseket, még korántsem válnak produktívvá, akárhogyan ismerik a logika szabályait. Ugyanis a produktivásban két mozzanatot kell megkülönböztetni: egyik az igazság megpillantása, a másik az igazság igazolása, bizonyítása. Sokan a matematikai tehetség lényegét *az igazság megpillantásában, megragadásában, a matematikai*

*intuációban látják. Poincaré,* mint fentebb láttuk, a matematikai tehetség lényegét *a sajátos matematikai rend iránti érzékben* látja. Ez az érzék egy szempillantás alatt észrevéti az ítéletek összességét, nem kell félni az elemek kihagyásától. Ez az érzék az intuáció. Ez kitaláltatja velünk az elrejtett összefüggéseket és összhangot. Akiben ez nincs meg nagy mértékben, sohasem alkot. Az intuáció lényege nem abban áll, hogy új kombinációkat létesítsen. Sokféle lehetőség van s ezek nagyrésze értéktelen. Az alkotás lényege föltalálni, nem haszontalan kombinálás. A lényeg épen a megkülönböztetésben s a kiválasztásban van (21; 127).

Épen ezért a feltalálásnak nincsenek szabályai.

Az intuáció sem elég a produktivitáshoz. Nem mindenkéül túlnyomó az intuáció szerepe. Továbbá az intuáció tévedhet is. A matematika akkor lesz tudománnyá, ha állításait, az intuitíve meglátott igazságot bizonyítja is. Az új megtalálása sokszor épen olyan nagy próba elé állítja a tehetségeket, mint az igazság megpillantása. *Gauss* mondta: *eredményeim megvannak, de nem tudom, hogyan jutok hozzájuk.* Az intuációra vonatkozólag *Fehr* kérdést intézett kora legnagyobb matematikusaihoz. A feleletek eredményeiből a következőket közlöm: 56 felelő  $\frac{3}{4}$  része azt bizonyítja, hogy sok eredménytelen kutatás után véletlenül, hirtelen jelent meg az eredmény (8; 34). Melyik az a pillanat, mikor az intuáció legjobban dolgozik? Erre 69 közül 38-an azt állítják, hogy az álmatlanság, de különösen a felébredés pillanata termékenyítő az invencióra. 7-en az álomnak tulajdonítanak jelentőséget, a többiek sem egyiknek, sem másiknak nem tulajdonítanak jelentőséget (8; 34).

Arra a kérdésre adott feleleteket, hogy legfontosabb eredményeiket spontán vagy valami vezető elv birtokában nyerték-e, három csoportba lehet osztani. 11-en a spontaneitást tartják fontosabbnak, de megjegyzik, hogy a munka is kiveszi részét, 15 felelet egyforma szerepet juttat mindkettőnek, hol együtt, hol külön-külön, 30 a szándékos munkának tulajdonít nagyobb jelentőséget.

Erre megjegyzi *Fehr* (8; 47), hogy ez adatok szerint a felfedezések soha nem születnek ösnemzésből. Mindig feltételeznek egy ismeretekkel bevetett és előkészített talajt. Más feleletből is kitűnik, hogy az olvasást fontosnak tartják és különösen a fiataloknak ajánlják.

*A munka-módszerre* vonatkozólag különböző típusok tűnnek szembe a feleletekből: 60-ból 30-an részleteket oldanak meg, és fokozatosan általánosítanak. 14 valami általános formulával keresi a megoldást, 16 vegyesen használja a módszereket az anyag természete szerint (8; 63).

A munka-módszereket tekintve *Ziehen* (19; 33) is három típust különböztet meg: 1. típusnál túlnyomó a térbeli szemlélet, a nem térbeli tartalmú problémákat is térbe viszi át,

a fogalmi fixálás másodrendű és gyakran semmi újat nem fűz hozzá.

2. típusnál a térbeli szemlélet háttérbe lép, a térbeli tartalmú problémákat fogalmiba viszi át, és utólagosan ismét visszahelyezi a térbe.

3. típusnál a térbeli szemlélet és a fogalmi fixálás többé-kevésbé koordináltan tevékenykednek, kölcsönösen támogatják egymást, megközelítőleg egyenlő mértékben.

Természetesen a típusok között átmenetek vannak és az egyes típusokon belül is sok változat fordul elő.

*Bieberbach* (1) ugyancsak a matematikai alkotásmódok különbségével foglalkozik. Az intuicionizmus és formalizmus ellentétét az egyes képviselők alkatából igyekszik megmagyarázni. A *Jaensch-féle* integrációs tipológiát veszi alapul, s a matematikai tehetségek között megkülönböztet S (szinesztéziás) és I (integrált) típust. Az S típus csak azt értékeli, ami a saját szelleméből ered, amit a szellem a valóságba beelát. Az I típus minden érzékével és pszichikai funkciójával nyitva áll a valóság számára, s így a szemlélet és gondolkodás harmonikus egységgé olvadnak össze. Szembeállítja *Cauchy*t (S) és *Gausst* (I). Továbbmenve megállapítja, hogy a faji különbség az alkotásmódra rányomja a bélyegét, szerinte a franciák S típusúak, a németek I típusúak. Ez utóbbi állítás bizonyára túlzó általánosítás.

Más típustant véve alapul: *Kretschmer* a matematikai tehetségeket a schizothym lelki alkatúakhoz sorolja. De ez a lelki alkat szorosán összefügg a leptosom testalkattal. *Somogyi*. (26; 132) saját vizsgálatai alapján megállapítja, hogy korántsem oly ritka a leptosom ellentéte: a piknikus alkat a matematikai tehetségnél.

Ugyanígy meg lehetne vizsgálni *Jung*, *Pfahler*, *Klages*, *Spranger*, *Horschach* stb., hazánkban *Boda*, *Dékány*. *Noszlopi* tipustanában a matematikai tehetség helyét. De ez már nagyon távolfekszik tárgyunktól.

Tehát a matematikai tehetség lényege az, hogy birtokosa képes mély igazságokat megállapítani és azt igazolni. Az alkotás tulajdonképeni lényegét a matematikai intuíciójában látják, ami az eredmény megtalálás módjára világít rá.

Az igazolás mód, a tehetségek munka módja, mint láttuk, egymástól különböző. De vannak formálisan megegyező tulajdonságuk is.

Minden alkotáshoz, mint láttuk is, szükséges bizonyos alapismeret. Igaz, hogy a tehetség nagyságát sokszor épen azzal a mérik, hogy kevés alapismerettel alkot-e átfogó munkát. De *ősnemzés' nincs*. Ezt az alapismeretet meg kell érteni, és megtartani. Nagy, átfogó összefüggések, gondolatok megértésére is nagyobb fokú képesség kell. A megragadott igazságot bizonyítani kell. A bizonyításhoz erős kritikai tehetség kell. A feltételekhez való szigorú ragaszkodás, a lehető-

ségek számbavétele, az eddigi eredmények figyelembevételéből. kritikai tehetséget igényelnek.

Minden produktív tehetségnek egyik tényezője a receptív és a kritikai. Hogy a produktív matematikusnak nagyobb receptív tehetségre nincs különösebb szüksége, illetve reprodukció terén többen túlszárnyalhatják, valószínű. De, hogy kritikai tehetségének lennie kell, legalább a saját alkotásai ellenőrzéséhez, az nyilvánvaló.

Eddigi fejtegetéseink során a tehetség fogalmát az átlagon felüli produktivitással kapcsolatban használtuk. Ezt a fogalmat szem előtt tartva, az átlagon feletti teljesítményt kiterjeszthetjük a reproductivitásra és a kritikára. Tehát, mint *Somogyi* (26; 194) az intelligenciával kapcsolatban rámutat, a tehetségnek három típusát különböztethetjük meg. A receptív típusnak az átlagon jóval felülemelkedő képessége van mély matematikai összefüggések, gondolatok befogadására és megtartására, anélkül, hogy azokkal szemben önálló állásfoglalásra, kritikára képes lenne.

A kritikai tehetségek a recepción felül az eredmények összevetésére, a módszer helyességének vizsgálatára is képesek. A gondolatokban észreveszik a hibát és a hibás részeket ki is tudják emelni az épületből, az odavalókat meghagyva, mondja *Wenzl* (31; 19). De a kritikai tehetség nagyobb alkotásra nem képes, illetve működésének súlypontja a kritikán van. Az alkotó képesség hiánya jellemezhet kisebb erejű intuíción, vagy más alkotáshoz szükséges tényezők hiányát. Vagy éppen a nagyméretű kritikai tehetség a gát.

E típusok között, mint sok más típus között, fokozatos az átmenet. Minden tehetségben mind a három tehetség-fajta előfordulhat, s a mérték aránya alapján sorozzuk őket egyik vagy másik tehetség típusba. E típusok segítségével szolgálnak a matematikai műveltség fogalmának megvilágításánál. A matematikában művelt embert az szokta megkülönböztetni a matematikában tehetséges embertől, hogy sem önálló alkotásokkal, sem kritikai munkásságával a matematika fejlesztéséhez nem járul hozzá és erre képességet nem mutat, viszont receptív tehetségével, áttekintő képességével, kisebb méretű kritikai tehetségével jóval felülemelkedik az átlagon. Tehát a művelt ember a tehetség és az átlag között áll. A magasabbrendű összefüggéseket is át tudja tekinteni, érti, élvezni a matematikát, anélkül, hogy a tudomány fejlesztéséhez közvetlen hozzájárulna. Ennek alapján a receptív tehetséget inkább a műveltség körébe kell utalnunk. Feltételezve, hogy a receptív tehetség a matematika alapjaival, módszereivel, ágaival tisztában van.

Ha összehasonlítjuk végül a tehetséget és átlagembert, nyilván azt találjuk, hogy *a matematikában tehetséges ember teljesítménye nem minden vonalon feltétlen áll felette az átlagemberén.* Nagy tehetségek között is akadtak, akik igen

gyenge számolók voltak, vagy az elemi műveletek elvégzésében gyengébbek voltak, mint az átlag. De nyilvánvaló az is, hogy legalább a saját területükhöz tartozó alapfogalmakkal, módszerekkel sokkal könnyebben, gyorsabban tudnak bánni az erejükhöz mért könnyebb problémán. A gyorsaság a kapcsolatok szinte hirtelen egyberendeződésére mutat, a könnyűség gátlástalanságára, kevesebb energia felhasználására vonatkozik. De vigyáznunk kell az általánosítással, különösen a nagyobb problémák megoldásánál nem lehet szempont a könnyűség és gyorsaság vizsgálata, mert a hangsúly a képességen van, képes alkotni, az másodrendű, hogy milyen munkamóddal. A gyorsaság hiánya gyakran az erősen fejlett kritikára és elmélyülésre mutat

Összefoglalva a fentebb mondottakat, *a matematikai tehetség, a matematika rendje iránti érzék birtokában képes az ember a lehetőségek között az igazságot megpillantani, megtalálni.* Ez tulajdonképpen annak a ténynek megvilágítása, hogy egyesek képesek alkotni, mások nem. A matematikai tehetség birtokában a matematikus nagy sötétségeken, hiányokon áttörve, az intuíció erejével képes az igazságot, az eredményt megpillantani

A megragadott igazságot igazolni, bizonyítani kell, vagyis az ismert összefüggésekkel való kapcsolatát kell megtalálni, megvizsgálni. Itt lépnek be azok a tényezők, melyek minden matematikai tevékenységnél szerepet játszanak: a fogalmak, illetve ezek megértése és megalkotása, a következtetések, illetve ezek megértése és megalkotása. A megértett és önállóan megtalált igazságot, illetve az igazsághoz vezető utat a matematika belső természetének szemmel tartásával az eddigi igazságokkal, „az igazsággal” össze kell hasonlítani.

Mindezen tevékenységek végrehajtásához szükséges képességekre mélyrehatóan mutat rá *Boda István* (2; 144) az értelmiség szerkezetére vonatkozó vizsgálódásának eredményeiben. E képességek: elvonás, lényegmegragadás, elmélyülés, szintetikus egységbefogás, kritikai érzék.

Azok a törekvések, melyek a matematikai tehetség fogalmi megragadására vonatkoznak, céljukat abban látják, hogy a matematikai alkotásoknál szereplő tényezők, előfeltételek közül a leglényegesebbet kiemeljék. Itt felvetődik a kérdés, vajjon minden tehetségnél a tényezők között azonos egyensúly van?

Ezek a tényezők, előfeltételek részben értelmi, részben érzelmi, részben akarati természetűek.

így *Möbius* (17; 15) elsősorban az igen jó emlékezetet tartja fontosnak. E mellett fontos, amit közönségesen éles észnek, ítélőerőnek vagy kombinációképességnek nevezünk. Harmadsorban fontos a szorgalom és akaraterő, mely minden kiemelkedő embernél megtalálható. *Poincaré* az említett ma-



tematikai intuíción kívül az emlékezetet és figyelmet emeli ki (21; 126).

Az emlékezet, illetve a tanulás fontosságát a *Fehr* kérdéseire adott feleletek is kiemelik.

Az alkotáshoz szükségesek többek között még a következő tényezők:

A problémaérzék fontosságát mutatja az, hogy akinek nincsenek önálló problémái, nem lehetnek önálló alkotásai sem. A problémaérzék a matematika természetének mélyebb ismeretét tételezi fel, ismeret utáni vágyból táplálkozik, hiányok felfedezésével tevékenykedik. A problémaérzék a megoldásra törekvés belső kényszerével párosulva szükséges feltételnek látszik a matematikai alkotások létrejötténél. De ez nem elegendő, mert ez az összekapcsolódás tehetség hiányában lelki konfliktusokra is vezethet.

A belső kényszer, mely a matematikai kutatásokat mintegy existenciális szükségletnek tartja, megtalálható minden nagy tehetségnél. Az egész élete átítatódik a matematikával, vele összeforr. Ez az érzelmi természetű belső kényszer biztosítja a lelki folyamatok dinamikusságát, ez szervezi egybe az alkotáshoz szükséges funkciókat.

Ezek után felvetődik a kérdés, mi az összefüggés a tehetséges matematikusok és a matematikában tehetséges tanulók között. Erre az összefüggésre a matematika iránti érdeklődés korai megnyilatkozása világíthat rá.

Ismert tény, hogy a matematika és zene terén az érdeklődés és a produktivitás kezdete sok tehetségénél igen fiatal korba esik.

*Dávid Lajos* írja a *Bolyaiakról* szóló munkájában, hogy *Bolyai Farkas* még gyermekkorában 14 jegyű számokból második és harmadik gyököt gyorsan és biztosan fejben tudott vonni (4; 3).

*Bolyai János* már négy esztendőskorában csak úgy játékból több geometriai testet ismer, egyet-mást tud a kör-ről, ellipsziszről, sőt a szinuszról is. Öt éves korában a csillagképeket próbálja lerajzolni. De még 9 éves koráig csak az ujjain tud számolni. 14-ik évében már a differenciál-integrál számításban könnyedséggel és rendkívüli készséggel dolgozik. Lángeszű villanásai vannak. 21-ik évében a semmiből egy új, más világot teremtett, t. i. a *Bolyai-geometriát* (4; 54).

*Gaussról* feljegyzik, hogy három éves korában kijavította apja hibás számítását. Később tréfásan mondogatta, hogy előbb tudott számolni, mint beszélni. 9 éves korában az aritmetikai sor összegezésének elvét fölfedezte. Első eredményét 18 éves korában érte el (6; 134).

*Pascal* önállóan kezdett foglalkozni a matematikával. 12 éves korában, a nélkül, hogy könyvet vett volna kezébe, *Euklides* megállapításaiból többet ismert. 16 éves korában megírta a kúpszeletekről szóló értekezését (8; 8).

*Clairaut* édesapja fiát az abc-vel együtt tanította geometriára, melyben bámulatos haladást tett. 10 éves korában *Margais de Hospitál* kúpszeletről szóló értekezését megértette. 13 éves korában írt értekezését a Tudományos Akadémia elfogadta (8; 8).

A 12 éves *Cauchy-ra Lagrange* azt mondta, hogy egykor pótolni fogja Franciaország akkor élő matematikusait (20; 152).

Már *Galoisnak* a tehetsége csak 15 év körül kezdett rendkívüli módon megnyilatkozni, és 21-ik évében, halála előtti éjjelen, összeállítja korszakalkotó művét (8; 10).

*Jacobi* csak 19 éves korában választotta ki a matematikát, addig a filológiával egyformán művelte (8; 11).

De vannak, kiknek később nyílik ki a tehetsége. *Lie* 26 éves koráig nem mutatott semmi szeretetet az exakt tudományok iránt. 26 éves korában *Poncelet* és *Plücker* munkái ellenállhatatlan szeretetet ébresztettek benne a matematika iránt (8; 11).

*Fehrnek* az érdeklődés felébredésére vonatkozólag 93-an adtak feleletet. Ezek szerint az érdeklődés a koragyermekkor és 26 év között jelentkezett (a feleletek alapján). Van, aki előbb ismerte a számokat, mint a betűket. Egyeseket vonza a számok eszméje, másokat az aritmetikai vagy algebrai problémák. Egyesek csodálkoznak a geometriai ábrázolás összefüggésein, mások érdeklődnek a bonyolultabb matematika iránt. A matematika-szeretet gyakran lappang, és kedvező körülmények között életre kel, legyen ez az iskola, környezete, vagy az első matematikai lecke. Kivirágzását gyakran gátolja hiányos oktatás. Máskor pedig az gátolja, hogy a matematikai tehetség más tehetséggel párosul.

A matematika iránti szeretet felébredt 10 éves kor előtt 35 esetben, 11—15 év között 43 esetben, 16—18 év között 11 esetben, 19—20 év között 3 esetben, 26 éves korban 1 esetben (8; 3).

Természetesen ezek a feleletek csak megközelítők.

Mindezekből látható, hogy *a nagy matematikai tehetségek legtöbbször korán megnyilatkoznak*. Tehát az alkotás előtt is rendkívüli jelek fordulnak elő, amelyek a tehetség meglétére mutatnak. Mivel a tehetség nélkül a legnagyobb érdeklődés és akarat sem biztosítja a matematikai kutatások sikerét, kézenfekvő, hogy *a matematikai tehetség örökölt*. A matematikai tehetség átöröklését többen vizsgálták. Itt is, mint minden átöröklési vizsgálatnál, sok a nehézség.

*Fehr* (18; 12) átöröklésre vonatkozó kérdésére 76-an feleltek, s ebből 47 örököltnek mondja a tehetséget, 29 nem örököltnek. De a pontosabb vizsgálat azt mutatja, hogy csak 20 embernél fogadható el az örököltség. Inkább a matematikus környezete a fontosabb, mely természetesen hat a tehetség kifejlésztésére. Vannak kiváló matematikusok, *Bernoulli*,

*Cassini, Herschel, Euler, Camot, Bolyaiak*, akiknek a családjában több kiváló matematikai tehetséget találtak.

A *Fehr* eredményei is megerősítik *Möbiusnak* (16; 5) azt a megállapítását, hogy ha a matematikai tehetség öröklődik, akkor főleg atyai ágon öröklődik. *Ziehen* e téren végezett vizsgálatai a hiányos feleletek miatt nem vezettek eléggé\* kielégítő eredményhez (9; 75).

Tehát bizonyossággal nem lehet kimutatni, hogy tehetséges matematikusok családjában már azelőtt is voltak nagyobb tehetségek. Egyes családoknál voltak, másoknál nem. De ez nem érinti azt a gondolatot, hogy a matematikai képesség már születésnél adva van, tehát a diszpozíciók megvannak a csecsemőben. Itt meg vannak szabva a kifejlődés határai, e határokat esetleg kedvezőtlen körülmények között el sem érheti az ember, de semmi energiával túl nem lépheti. Ezen felfogás szerint a matematikai képesség születéssel meghatározott, de fejlődésnek alávetett. Így mindenkinek van matematikai képessége, csak az egyes emberek matematikai képessége különbözhetik a fejlődési lefolyásban, a pillanatnyi fejlettségi fokban és a fejlődés határaiban, vagyis a teljes kifejlődés méreteiben. Matematikai kapacitásban lehetnek és vannak különbségek. Tehát az átlagember és a tehetség között kapacitásban van különbség. Ami a tehetségre jellemző, megtalálható az átlagembernél is, csak más fejlettségi fokban.

A matematikai képesség felvétele nem ellenkezik a középiskola célkitűzésével. A középiskolai anyag az átlag fejlődés menetéhez, fokához igazodik. Amilyen matematikai képesség kell a középiskolai matematikához, azt a fejlettségi fokoi minden normális gyermek eléri. Hogy bizonyos fokú képesség kell, az természetes, hiszen a középiskolába való belépés is bizonyos fejlettségi fokához van kötve a képességeknek. A matematikai képesség felvétele nem azt jelenti, hogy olyan képesség vagy képességek, melyek más területtől teljesen függetlenek. Pl. valaki az összefüggéseket minden területen jól meg tudja jegyezni, de a matematikaiakat tudja legjobban megjegyezni. A matematikai képességek felvétele nem érinti tehát az alaki képzés elvét sem, hiszen az alaki képzés, mint *Várkonyi* (30; 95) kimutatta, lehetséges, értékes és szükséges. Továbbá az a feltevés sem igazolt, hogy a matematikai képesség izoláltabb más képességtől az átlagos értéket tekintve. Erre vonatkozólag *Himpel* (10; 492) kimutatta, hogy a matematikai jegyek a középiskolában nem térnek el gvakrabban és nagyobb mértékben az átlagtól, mint pl. a nyelvi jegyek.

A *matematikai képesség fejlődése*, mint minden fejlődés, a differenciálódás és integrálódás alakjában folyik le. A fejlődés lehet folyamatos, egyenletes vagy ugráló. Tempója lehet gyors, vagy lassú. Lehet változó. A képesség határait hamarabb vagy későbbben éri el. Mindezek a megkülönböztetést bonyolulttá teszik.

Kit nevezzünk matematikában tehetséges tanulónak? Első fogalmazásban, a matematikai tehetség mintájára, azokat a tanulókat, akik az átlagon felüli teljesítményre képesek. De ez a teljesítmény csaknem mindig különbözik a matematikai tehetség teljesítményeitől. A tehetséges matematikus gondolatai, művei előmozdítják a matematika fejlődését, de a tehetséges tanulónak teljesítményei ettől távol állanak. Az a tény, hogy nagy tehetségek fiatal-, szinte gyermekkorukban önálló értékes művet alkottak, nem lehet szempont, mert most megjegyezhetjük, hogy a további tárgyalásaink során nem a nagy matematikai tehetségek, inkább a matematikában művelt emberek játszanak szerepet.

A tehetséges matematikus és az egyelőre tehetségesnek nevezett tanuló között lényeges különbség az, hogy a tehetséges matematikus matematikai képessége már legtöbbször kifejlődött, míg tehetséges tanuló képességei fejlődésben vannak. A tehetség fogalmát a tanulóknál csaknem mindig prognosztikus értelemben használjuk. Tehát a fejlődés és a teljesítmények értékének viszonylagossága bonyolulttá teszik a középiskolai tehetség kérdését. Ha az önálló értékű teljesítmény fogalmát nem használhatjuk, akkor igyekszünk segítséggül venni a tehetséges matematikusok matematikai képessége fejlődésére mondottakat. Legtöbbször a szinte szédületes gyors fejlődés jellemző, az átlag ember fejlettségi fokát igen hamar elérték, a produktivitás igen hamar megjelent. Hamar támadtak önálló gondolataik. Nem bizonyos, hogy akiknél fiatal korban ezeket a jegyeket megtaláljuk, azok produktív matematikussá válnak. Igen gyors fejlődés után hamar elérhetik képességeik határát. De sokkal nagyobb a valószínűsége annak, hogy magasabb matematikai műveltséget képesek szerezni, mint akiknél ezek a jegyek hiányzanak.

Tehát a matematikában tehetséges tanuló képét vagy fogalmát úgy célszerű meghatározni, hogy a tehetséges matematikusra mondottak részben átvihetők Tegyenek.

A tehetséges tanuló szintén az átlagon felüli teljesítményre képes. A teljesítmény lehet produktív és receptív.

Itt, mivel úgyszólván soha nem lehet szó tudományos értékű produkcióról, meg kell azt vizsgálnunk, hogy ez a teljesítmény mennyire áll felette az átlagnak. Lehet, hogy meghaladja a matematikában műveit ember színvonalát. Ez esetben kétségtelen a tehetség. Meghaladja a középiskola, vagy a magasabb osztályok, vagy csak a tanuló osztályának színvonalát. Ha az átlagtól való eltérés nem nagyon jelentős, akkor az eltérés okát nem mindig a prognosztikus értelemben vett tehetségben kell látnunk. Ugyanakkora teljesítményt mutathat fel két szorgalomban erősen különböző tanuló. Ez esetben azt, aki csak sok tanulással, gyakorlással érte el az átlag feletti teljesítményt, kevésbé mondjuk tehetségesnek.

mint a másikat, igaz, hogy a pillanatnyi fejlődésfokuk lehet azonos, de aki csak sok gyakorlással éri el a kiváló eredményt, feltevés szerint legalább egyelőre közel van teljesítőképességének határához, kevesebb fejlődési lehetőséget mutat. Épen ezért *a tehetség megállapításánál a gyakorlás által okozott eltéréseket lehetőleg megszüntetni igyekszünk.* Továbbá, ha a matematikai tehetség fogalmát itt is érvényesíteni akarjuk, akkor az átlagon feletti produktivásban, illetve alkotóképességében kell látnunk a matematikai tehetség lényegét. A tehetséges matematikus *problémákat lát meg, s azokat megoldja* Tehát a tehetséges tanuló is önállóan vet fel problémákat és önállóan megoldja. Másik fokozat: *más veti fel a problémát, s a tanuló önállóan megoldja.* A gyakorlás szerepének háttérbe szorítását látjuk a tehetségnek *Ziehen-féle* fogalmazásában, mely szerint a tehetség nem a gyakorlástól, hanem az agynak öröklött, vagy igen korán szerzett diszpozíciójától függ (33; 7). A gyakorlás kikapcsolását úgy képzelhetjük el, hogy olyan teljesen ismeretlen probléma elé állítjuk a tanulókat, amelyhez szükséges elemi ismeretek mindenkinek egyformán rendelkezésére állanak, vagy olyan ismeretlen probléma elé, melyhez mi adjuk meg az alapfogalmakat, így egyforma eséllyel indulhatnak a megoldásra. A tehetséges matematikus művei *önállóak, értékesek.* Az önállóság abban áll, hogy ismeretlen területen, ahol esetleg nagyon kevés támpont áll rendelkezésre, *saját erejéből* át tudja törni a sötétséget s az igazságot megragadni. Az önállóságot legfontosabb vonásnak ismerjük fel a tehetséges tanuló vonásai között. Az önállóság legjobban megnyilvánulhatik valamely *új probléma önálló felvetésében és megoldásában,* általában ismeretlen probléma megoldásában, a kritikai magatartásban, a matematikára vonatkozó önálló gondolat felvetésében stb.

Fontos megvizsgálni, vajjon ez az önállóság átvihető-e más nehezebb területre, s egyáltalán könnyen fejleszhető-e? Ez utóbbi eset rejt legtöbb lehetőséget magában.

A tehetség fogalmát kitégítva, nemcsak az átlagon felüli *produktivásban,* hanem az átlagon felüli *receptivásban* is igyekszünk megkülönböztetni a tehetséget. *Receptív tehetség* az, aki az átlagon felüli, nagyságban és bonyolultságban átlagnál nehezebb matematikai ismeretet képes megérteni. Magasabb értelemben: ismereteit organizálni képes, természetesen az átlagon jóval felül, az eddigi ismereteket rendszerben látja, módszerek, elvek kiemelésére és megtartására képes. Minden téren *a matematika iránti fogékonyság* jellemző rá. Az a kérdés, hogy mindezeket az átlag színvonalon gyorsan és könnyen tudja-e elvégezni? Az átlag teljesítményekhez nem kell annyi energia, nincsenek nehéz akadályok s így könnyen folyik le a tevékenység, ilyenkor a funkciók gyorsan szerveződnek egybe, így eléggé érthető, hogy a gyors és könnyű

jelző gyakran szerepel a matematikában tehetséges tanuló rajzánál. De a lassúság többször az elmélyedés, a kritika jele. Továbbá a gyorsaság származhatik a sok gyakorlásból is. Ha a könnyűség és gyorsaság a bonyolultabb problémák területére is elkísérik a tanulót, akkor ez lehet jele a receptív tehetségnek, megjegyezve, hogy kevés energia felhasználás és gyors és helyes munka nagy jelentőségű bonyolultabb kérdések megvilágításánál.

A receptivitásnál is igen fontos a teljesítőképeség határait kipuhatolni, mert nagyobb valószínűséggel következtethetünk a jövőre vonatkozólag.

*Összefoglalva az eddig mondottakat: a matematikában tehetséges tanulóra jellemző az átlagon felülemelkedő önállóság, fogékonyság és könnyen fejleszthetőség.* Megjegyzendő, hogy az önállósággal nem mindig jár nagyobb fokú fogékonyság, legalább is nem minden vonalon.

Ha azt vizsgáljuk, hogy *milyen speciálisan matematikai tényezők szükségesek az átlagon felüli tevékenységhez*, akkor ismét hivatkozhatunk Ziehen vizsgálataira. De ezeken is túl, ha azt akarjuk vizsgálni, hogy milyen tényezők, helyesebben képességek szükségesek a tehetséges teljesítményhez, akkor az előzőleg tett több megállapításra kell hivatkoznunk. Mondottuk, hogy *az átlagon felüli színvonalat az organizáló képesség, szerkezetek, elvek kiemelésének képessége stb. teszik lehetővé.* Továbbá, ha az új probléma önálló megoldását, de részben megértését is tekintetbe vesszük, a következő fontosabb mozzanatot, tevékenységet kell figyelembe vennünk:

*A matematikus a problémát és a megoldás útját látja, a megoldásban a problémát, szerkezetet állandóan szemmel tartja, eddigi lépéseit a problémával s általában a matematikai igazságokkal egybeveti. A szükséges tényezőket akadálytalanul tudatba emeli, a többit lesüllyeszti. Meglátásait összefüggések, következtetések önálló összekapcsolásával megvalósítja. Minden lépését kritikával kíséri.*

Az új problémák megértéséhez, önálló megoldásához, illetve a matematikai kapacitásnak az átlagon jóval felülemelkedő kifejlődéséhez, vagyis a fenti tevékenységek végrehajtásához szükséges képességeket megkapjuk, ha a Éoda által talált általános képességeket speciálisan a matematika területére vonatkoztatjuk. Ezek a képességek: *elvonás, lényegmegragadás, elmélyülés, átfogóképesség, kritikai érzék.*

A képességek fokozott mértékben való jelenléte lehetővé teszi az alkotást, de szükséges még ezen képességeknek a működésére egybeszerveződniök; ezt az egybeszerveződést az érzelmek biztosítják.

Az érdeklődés a tehetségek kifejlődésénél, alkotó képességénél természetszerűleg nagy szerepet játszik. A fő elvet itt Várkonyi (28; 42) a következőképpen fogalmazza meg: *Csak*

*kevés tanuló kutat, kérdez tisztán a tárgyért, önmagáért. Aki azonban ilyen, csakhamar specialistává válik.*

Tehát, aki spontán, mintegy belső kényszertől hajtva foglalkozik a matematikával s képességei is megvannak, ez érdeklődés állandósulása esetén valószínűleg eléri kapacitása határait. A tehetséges matematikusnál, ha az érdeklődés felébredt, a fejlődés gyakran rohamosan megindul. Ez a tény szolgál gyakran a tehetségek elválasztására egyenlő érdeklődés esetén. Ugyanis *a kevésbé tehetséges, ha sokat is foglalkozik a matematikával, kevés fejlődést mutat.*

Végül ismét megjegyzem, hogy a tehetséges tanulók vizsgálatánál az a cél, hogy *kipuhatoljuk azokat, akik a magasabb matematikai műveltség elsajátítására aránylag legtöbb képességgel rendelkeznek.*

A következő lépés az, hogy *felkeressük azokat, akiknél e képességek legalább egy része megvan, kutassuk azt, hogy esetleg mi gátolja őket a sikeres teljesítmény végrehajtásában.*

K teljesítményeket részekre bonthatjuk, s úgy vizsgáljuk pl. a probléma-érzéklet, kritika-érzéklet, s így többoldalú vizsgálattal az egyes képességek meglétét megállapíthatjuk.

Valakinek a tehetségét alkotása előtt épen abból igyekszünk felismerni, hogy az általános színvonalat, s egyik vagy másik alkotáshoz szükséges képességét vizsgáljuk.

### **A matematikában tehetséges tanulók irányítása.**

A nevelői tevékenységnek a nevelendő megismerésén kell alapulnia. Ennek megfelelőleg ismertetem a tanulók leírásai alapján az iskolai tehetség megnyilvánulásának több vonását. E vonások értelmezéséhez, értékeléséhez néhány szempontot az előbbi fejezetben közöltem. Ez a kis áttekintés nyilvánvalóan hézagos. Pl. a lappangó tehetségről, tehát olyan tanulóról nem tettem említést, aki sem érdeklődésével, sem teljesítményével nem tűnik ki a többitől, de később kifejlődik. Egyelőre helyezkedhetünk arra az álláspontra, hogy az érdeklődés felébredéséig várunk. Hiányzik a nem értelmi tényezők szerepének bővebb megvilágítása. A hipotetikus felvett matematikai elvonó, lényegmegragadó, kritikai stb. képességek megnyilvánulásainak összehasonlítása az elvonó, kritikai stb. képességek más területen való megnyilvánulásaival szintén megoldásra váró feladat...

A matematikában tehetséges tanuló mélyebb megismerése is természetesen a gyermeklélektan és neveléslelektan módszereivel érhető el. E módszerekkel hazánkban legtözetesebben *Várkonyi* foglalkozik könyveiben (28), (29). E módszerek között szerepel a kísérlet is. A kísérleti vizsgálódások tulajdonképpen a szubjektív mozzanatot igyekeznek redukálni a megfigyeléseknél. A tárgyalásaink során szereplő átlag és

átlagon felüli fogalmak precizizálására törekszik a kísérlet. Meg kell jegyeznünk, hogy a szubjektív megfigyelés lehet oly mély és értékes, hogy a kísérlet értékben nem közelítheti meg, mégis ahol csak lehet, helyes a kísérlet használata, mint a szubjektív meglátások igazolásának, illetve korrigálásának eszköze. A matematika területén alkalmazott tesztvizsgálatokkal *Márkus* (17) behatóan foglalkozik. Könyvének egyik fő értéke a matematikai tehetségvizsgálatok tesztjeinek és eredményeinek közzétevése. Megjegyezhető ugyan az, hogy ezek a tesztek igen különböző értékűek, s ennek és a kísérleti személyek kis számának következtében több eredmény értéke csekély.

Az előző fejezetben utaltunk a tehetségfelismerő próbák természetére. Éhhez kapcsolódva jelenleg olyan tesztek szimptóma-értékének a meghatározásával foglalkozom, mely tesztek megoldásához csak a négy alapművelet ismerete szükséges. Az alapműveleteknél több helyen a számokat kitöröljük; a feladat: a kitörölt számok meghatározása. Egyelőre az látszik, hogy e tesztek némelyike alkalmas valamely csoport, pl. osztály legkiválóbbjainak és leggyengébbjeinek az átlagtól való határozott elválasztására.

Ezek előrebocsátásával rátérhetünk a nevelési tennivalók tisztázására. A következőkben a matematikában kiváló tanulóknak csak azzal a típusával kívánok foglalkozni, aki az átlagot jóval meghaladó, tehát az órán túlterjedő érdeklődést mutat a matematika iránt. Tehát pl. sokat foglalkozik különböző példák megoldásával, könyveket szeretne olvasni stb.

*Mi legyen ezekkel szemben a nevelő magatartása?*

E magatartáshoz szükséges elvi alapokat *Mitrovics Gyula: A neveléstudomány alapvonalai* című művéből röviden a következőkben foglalhatjuk össze: A nevelés a természetes fejlődés irányítása és elősegítése (18; 51). A nevelés célja az ember más élőlénytől megkülönböztető magasabbrendű vonásainak kifejlesztése, vagyis a tiszta humanitás elérése. Az ehhez vezető út a következő fejlődési fokozatokon halad át: tárgyszerűség, egyéni, erkölcsi és végül transcendens szuverenitás. A nevelő célja ez út megkönnyítése, megrövidítése az elmélyedés elősegítése céljából. A nevelés célját a nemzetiség és korszerűség is meghatározza. Így a nevelés célja: az embernek a nemzeti társadalom szolgálatában álló vallás-erkölcsi személyiség méltóságára emelése (18; 64). A személyiség fogalma kifejezi egyrészt az egyéni erők lehető legteljesebb kifejlesztésének jogát és kötelességét, de másrészt azt is, hogy ezt az erőt az emberi közösség életfolytonosságának szolgálatába kell állítani. A nevelésnek a célját az értelem, érzelem és akarat nevelésével közelíthetjük meg. Az értelemnevelés célja legközvetlenebbül a létfenntartáshoz, az



élethez szükséges ismeretek nyújtása. De ugyanakkor eszményekkel, ideálokkal is megismertet. Az értelmi nevelés következménye magának az elmének kiművelése. A gyermek megszokja a logikai elvek érvényesítését, tehát értelmi képességei kifejlődnek. A főcél itt a szellemi erők formális képzése, az emberi lélek képességeinek összhangzatos fejlesztése.

*Az értelem formális képzésének egyik főeszköze* — mint azt *Thorndike* (30; 29) vizsgálatai is bizonyítják — *a matematika*. De a matematika tanításának nemcsak formális, hanem materiális célja is van: megismertetni az általános műveltséghez szükséges matematikai műveltség elemeit. Ez utóbbi fontosságára mutat az a tény is, hogy a matematika fogalmai, így pl. a függvény fogalma, az életnek mind több területén nyernek polgárjogot. A matematika formális képző ereje nyilvánvaló. A logikai elvek felismerését és alkalmazását talán éppen a matematikánál gyakorolhatja legjobban a tanuló. A tudományról alkotott fogalmát többnyire a matematikánál szerzi a tanuló. Az igazságról, a bizonyítás szükségességéről, a bizonyosságról stb. itt mély benyomást szerez. A matematika absztrakt tudomány, jellemző rá a tiszta fogalmi gondolkodás. Az absztrakt gondolkodást általában a legfejlettebb gondolkodásmódnak ismerik el. De természetesen a matematika anyagát a tanulók fejlődéséhez szabják. Mindezek ellenére többeknél a matematikával szemben gátlások lépnek fel. E gátlások, hibák vizsgálata fontos, mert negatív oldalról mutatnak rá a matematikai tehetség természetére, de e vizsgálat főleg nevelési szempontból igen fontos. E gátlás megnyilvánulhat abban, hogy valaki képtelen az absztrahálás magaslatára emelkedni, képtelen fogalmilag gondolkodni. E gátlásokat, hibákat hazánkban s külföldön többen vizsgálták, így hazánkban újabban *Pajor* (20), de főleg *Szeliánszky*. *Szeliánszky* eredményei a következők: Pszichés hibafajták: begyakoroltsági, perszeverációs, hasonlósági hibák, kvantitatív gátlás, érzelmi és emlékezeti hibák, utóhibák, keveredéshibák.

Ezen hibák közvetlen szomszédjai a szubjektív tévedések.

Nem pszichés természetű hibák: technikai fogyatékoság, egyéb zavarok, tudatlanság, felderítetlen hibák (27; 39).

*Wenzl* (31; 73) a matematikai műveletek hibaforrásait a következőkben látja: nem tudás, az operatív gondolkodás összetévesztése az asszociatív gondolkodással, az átpillantás, célkitűzés elhanyagolása, a gondolkodási nehézség, tehetetlenség, végül a gondolkodási tempó lassúsága.

*Duncker* (7; 134) a matematika terén a gondolati anyag szerveződésének nehézségét a következő két okra vezeti vissza: 1. A gondolkodási anyag relatíve rugalmatlan, merev és

ezért az átformálásra nem elég plasztikus. 2. A gondolkozási anyag mélyen kötődik össze a szemléleti funkciók egy bizonyos fájával.

A tehetséges matematikust éppen ezeknek a gátlásoknak a hiánya jellemzi. Mint fentebb említettem, a matematikában kiváló s egyszersmind az átlagon felül érdeklődő tanulókkal kívánok foglalkozni. Az érdeklődés, mint láttuk, erősen összefügg a tehetséggel. Az érdeklődés spontánsága, nagyobb intenzitása, állandó vagy fokozódó jellege kétségkívül erősen hat a tehetségek kifejlődésére. De az érdeklődés nagyobb képesség nélkül nem jelent sikert. Ha az alacsonyabb képességgel párosult érdeklődés a tanulóknál elő is fordul, hamar el is múlik, ugyanis egyrészt a szubjektivitásnak nincs tág tere a matematikai teljesítmények megítélésénél, másrészt az érdeklődés rövid idő alatt másfelé fordul. A közepes tehetségű, de erősebben érdeklődő tanulókat a következőkben számbavesszük. Az érdeklődő tanulónál fontos az érdeklődés motívumait megvizsgálni. Az érdeklődés származhatik annak a felismeréséből, hogy a matematikai gondolkodás rokon vagy azonos a tanuló gondolkodásával. De származhatik pl. utánzástól, tehetségesnek látszani akarásból stb.

*Mit csináljon a nevelő a feltámadt érdeklődéssel?*

A nevelésben fel kell használnunk a tanulók érdeklődését, de kizárólagosan az érdeklődésre nem lehet az oktatás anyagát alapítani, jegyzi meg *Várkonyi* (28; 42). A helyes felfogás az, hogy az érdeklődés nem annyira előfeltétele az oktatásnak, mint inkább eredménye (28; 42). Tehát ha a matematikai oktatással az a célunk, hogy a matematika iránt az érdeklődést felkeltsük, akkor a felkeltett érdeklődést még inkább táplálnunk kell. Az eddigi fejtegetések is megerősíthetnek bennünket abban, hogy a tanulók képességeit minél teljesebben ki kell fejlesztenünk, s ezt annál inkább megtehetjük, mert ezt a tanulók is intenzíven akarják. A nevelési tennivalókat két természetes körülmény határozza meg: egyrészt a tanuló spontán érdeklődése, másrészt a tanár fejleszteni akarása, fejlesztési vágya.

*Mi lehet a feladatunk az érdeklődő tanulókkal szemben?* Nyilván a matematikai oktatás céljának fokozottabb érvényesítése, vagyis a matematikai műveltség elemeinek mélyebb megismertetése, ezzel a tanulók képességeinek intenzívebb kifejlesztése.

*Ezt a célunkat elérhetjük-e a tanóra keretein belül?*

Egyes tanárok a kiváló tanulókat a tanórán belül kívánják intenzívebben foglalkoztatni. Itt reá kell mutatnunk egyes nehézségekre. Pl. a probléma meglátás, a megoldás útjának felfedezése nem lehet a kiváló tanulók számára fenntartott terület. A középiskolai oktatásban egyenlő szerepet kell jut-

latnunk a különböző képességű tanulóknak, illetve a gyakorlatban legtöbbször a gyengébbeket tartjuk szem előtt. Ha azt akarjuk, hogy a gyengébbek fedezzék fel a problémát és a megoldáshoz vezető utat, amit a fokozatos megvilágítással s a lehetőségek szűkítésével érhetünk el, akkor nem engedhető meg, hogy a kiválóak előre megmondják az eredményt, mert ez szugesztíve hat a gyengébbek gondolkozására, illetve felmenti őket a további gondolkozás alól. Már több joggal foglalkoztathatjuk a kiválókat valamely levezetés menetének elmondásával, távolabbfekvő összefüggések összekapcsolásával stb. Az érdeklődés fenntartására a kiválók számára adhatunk bonyolultabb házi feladatot stb. De a kiváló tanulóknak az óra keretén belüli foglalkoztatása csak kisebb mértékű lehet, egyesek nagyobb érdeklődése mutatja, hogy az órán érdeklődésük nem talál teljes kielégülésre. Így az órán*kívüli* foglalkozás lehetőségét kell mérlegelnünk. De itt számolva a következményekkel, felvetődik a kérdés, *jogos-e az órán kívül foglalkoztatni valakit, összeegyeztethető-e a nevelés céljával?* A mi esetünkben nyilván összeegyeztethető, hiszen a nevelés célját intenzívebben valósítjuk meg. Csak egy körülmény kíván megoldást. A matematikában kiváló és a matematika iránt erősebben érdeklődő tanulók általában mindenképp kiválóak. Mégis megeshetik, hogy a gyengébb tanulók közül is kerül ki nagyobb matematikai képességgel rendelkező tanuló. E tanulóknak a matematikával való behatóbb foglalkozása, míg más területen romlást nem idéz elő, nyereség a maga és a társadalom számára is, mert olyan területen tökéletesíti magát, ahol a legnagyobb teljesítményre képes. Ha ellenben kiváló tanulók a matematikával való foglalkozás következtében más területen leromlanak, ami legalább mint logikai lehetőség fennforog, akkor a beavatkozás, a tanulóknak más terület felé visszafordítása szükségessé válhatik. Habár ez is egyéni elbírálás tárgya lehet. De sokkal több példa lehet arra, hogy valakinek az átlagos színvonalának magasabb kifejlődését egy tárggyal való behatóbb foglalkozás indította meg. Egy ponton való emelkedést az általános színvonal emelkedése követte. Tehát az órán*kívüli* foglalkozás nemcsak lehetséges, de hasznos is. A nevelés tulajdonképpen a ható tényezők tervszerű csoportosításából áll, erről a tervszerű munkáról a nevelő nem mondhat le, tehát az iskolán*kívüli* foglalkozását is irányíthatja a tanulóknak.

Mint említettük, itt sem lehet más cél, mint a matematikai műveltség elemeinek intenzívebb megismertetése s ezzel a képességek erősebb kiművelése, fejlesztése. Ez lehetséges, mert a tanuló maga vágyik rá, maga akarja, s erre képes is. A közelebbi tennivalókra bizonyos tekintetben az eddig elmondottak világíthatnak rá. A közvetlen személyi ráhatás

módja közelebbről nem is világható meg. A most következő megfontolások inkább külsőlegeseek. A tanárnak, mielőtt az óránkívüli irányítást megkezdené, közelebbről meg kell ismer-  
nie a tanuló képességeit, érdeklődésének motívumait, irány-  
nyát s erősségét. A nevelési tevékenység e mélyebb ismeretre  
támaszkodik. A nevelő számba veszi a tanuló képességeinek  
fejlettségi fokát, az érdeklődését, s úgy végeztet vele munkát,  
irányítja érdeklődését, hogy minden megerőltetés nélkül hatá-  
sos fejlődés induljon meg. Fontos tényező a sikerhez juttatás.  
Ha a tanuló képességei az átlagot jóval meg is haladják, ne  
készessük olyan problémák befogadására, megoldására, mely  
nagyobb fáradságba, vagy több időbe kerül. Középpontban az  
önállóság fejlesztése áll, így, ahol csak lehet, a tanuló öntevé-  
kenységére támaszkodjunk. Az óránkívüli foglalkozásnál a  
speciális fejlettségi foknak és az érdeklődési iránynak meg-  
felelően az egyénenkénti foglalkozás a legalkalmasabb. De az  
egyénenkénti foglalkozásnak több akadálya lehet, továbbá  
nem mondhatunk le a csoportos együttműködés előnyeiről  
sem, feltéve, ha több kiváló tanuló érdeklődik. Tehát az  
érdeklődő tanulókat csoportba, mondjuk *matematikai körbe*  
szervezzük. Ez nem jelenti a tagság, tisztikar, tagsági díj stb.  
bevezetését. A teljes kényszernélküliség legyen a vezető elv.  
Mindenki akkor jelenik meg, amikor akar, s akkor marad el,  
esetleg végleg, amikor akar. Legajánlatosabb — érdeklődők  
esetén — az V., VI. osztályokkal külön és a VII., VIII. osztá-  
lyokkal külön foglalkozni. Természetesen lehet együtt is. E  
kört a tanulók matematika iránti érdeklődése s a nagyobb  
teljesítményre való képessége tartja össze, így egyike a  
középsiskola legegészségesebb köreinek. Az önállóság kifejlesz-  
tését tartsuk szem előtt, az egyéni foglalkoztatásról itt sem  
mondunk le. Pl. láttuk a nagy matematikusoknál a különböző  
munkamódokat, ezt a különbséget, természetesen kisebb mér-  
tékben, egyes tanulóknál is megtalálhatjuk. Nyilván annak  
a munkamódnak a kifejlesztése ajánlatos, mellyel a tanuló  
legtöbb eredményt ér el.

E csoport összejövételén történhetik meg a matematikai  
gondolkozásmóddal való közelebbi megismerkedés. Az axio-  
matikus gondolkodás, szemlélettől elvonatkozás, absztrakció,  
általánosítás, a permanencia elv, a szükséges és elégséges elv,  
összes lehetőségek kivizsgálása, tisztaelvűség, bizonyítás szük-  
ségessége, szigorú gondolkodás, elegáns megoldás stb. mind  
szóba kerülhetnek.

Az összejövetelek anyaga nem lehet a következő iskolai  
lecke, sem kizárólag az egyetemi anyag. A lényeg itt a közép-  
iskolai anyag elágaztatásában, kiszélesítésében, általánosítá-  
sában van. Tehát az eddigi ismeretek mélyebbé tételéből  
indulhatunk ki. Ezenkívül szó lehet a matematika alapjairól,

módszereiről, a tanulók előtt ismeretlen ágairól, a matematika alkalmazásáról. Ezekhez kapcsolódhatnak bizonyos feladatok megoldása, esetleg versenyek. A tanulók matematikai képességeinek mélyebb megismerését célzó kísérleti vizsgálatok is lehetnek tárgyai ez összejöveteleknek. Szó lehet a matematikusok életéről, különös tekintettel a magyar matematikusokra. Szó lehet a matematikai érdekességekről stb.

Az összejövetelek lefolyásának módját a tárgy természete szabhatja meg. A matematikus tanárok a matematika általuk kedvelt ágáról rövid ismertetést tarthatnak, melyet mindig megbeszélés követhet.

De más kérdések előadásánál is szerepelhet a tanár, arra ügyelve, hogy amit csak a tanulók kisebb fáradsággal megtudnak csinálni, azt rájuk bízva. Épen ezért mindenkinek a képességeihez, érdeklődéséhez mért problémát, feladatot adhat a tanár, pl. valamely kérdés továbbfejlesztését. Természetesen adhat útbaigazítást is. A kérdést a tanuló kidolgozza, előadja, s az előadást megbeszélés kíséri. A tanár természetesen igyekszik a tanulók képességeinek minél teljesebb kifejlesztésére. Szem előtt tartandók: a probléma meglátás, az eredmény és az út meglátása, a megoldás lépéseinek előre elterveztetése, az összes lehetőségek figyelembevétele, az elvek érvényesítése, a módszerek kiemelése, a levezetések szerkezete, menete, a megoldott probléma organikus összeillesztése a már ismert összefüggésekkel, a probléma továbbfejlesztése, általánosítása stb.

A *részképességek* külön gyakorlását is megpróbálhatjuk. A szükségesnél több vagy kevesebb feltétel, általában a hiba felfedeztetése, valaminek a végsőbb alapokra való visszavezetése stb. alkalmat ad erre. Természetesen a részképességek izolálása csak kis mértékben lehetséges és a hangsúly e képességek összhangzatos működésén van.

Az összejöveteleken a beszélgetés, megbeszélés uralkodik. A tanár irányít, esetleg helyesbít, ellenőriz s közben mind tisztább képet nyer az egyes tanulók képességeiről, ezek kifejedésének határaitól. Hasznos lehet, ha a tanár tapasztalatait feljegyzi, így a tanuló későbbi fejlődését e megrögzített képpel egybevetve, ismereteit bővíti, s felhasználja nevelői tevékenységének elmélvítésére. A tanár a kör tagjaihoz közelebb jutva, más területen is hatásosabban fejtheti ki *nevelői* tevékenységét.

Ha egy városban több kör van, azok megkereshetik egymással a kapcsolatot. E körök között az országos kapcsolatot pl. egy matematikai lap teremtheti meg. Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy a tanulók kezébe matematikai lapot is adhatunk, a *Faragó Andor* szerkesztésében megjelenő *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat* E lap eddig is nagy szolgálatot tett a magasabb matematikai műveltség

íránti érdeklődés felkeltése és fejlesztése terén. E lap nagy segítségére lehet a tanárnak: e lapban régebben és újabban kitűzött feladatok megoldásával foglalkoztatja a kör tagjait. De természetesen a lap nem helyettesítheti teljesen a matematikai kört. Igen hasznos *Kürschák: Matematikai versenytételek* című könyve is. Megjegyezhetjük, hogy a kizárólagos feladat-megoldás bármilyen hasznos is, de magában még nem biztosíthatja pl. a reprodukív képesség, az átfogó képesség stb. fejlődését.

Ha akad olyan szerencsés eset, hogy a tanuló képességeivel a középiskolai színvonalat hamar túlszárnyalja és a tanár sem tudja követni valamely speciális területen megfelelő módon, nyilvánvalónak látszik annak szükségessége, hogy a tanulót e terület valamely szakértőjével kell megismertetni. Végül megjegyezhetjük, hogy a tanuló minden matematikai tevékenysége nem korlátozódhatik csak a matematikai körre, itt csak *irányítást* kap az önképzésre.

A matematikával való foglalkozás *eredménye* lehet: *az érdeklődés állandósulása, a magasabb matematikai műveltség elsajátítására, esetleg a matematika önálló művelésére szolgáló képességek kifejlődése és a szükséges alapok megszerzése. A tanuló önismerete* elmélyül. Megismeri képességei természetét, *képességeiről tisztább képet nyer. A tanár a tanniókat jobban megismeri.*

*Ezzel* kapcsolatban még meg kell emlékeznünk arról, hogy a középiskola még keveset tett a *pályaválasztási tanácsadás terén*. A pályaválasztást megkönnyíti így egyrészt az, hogy a tanuló jobban megismeri képességeit, másrészt a tanár is biztosabb ismeretek alapján adhat tanácsot a hozzáférhetőnek, vagy esetleg felhívhatja a tanuló figyelmét egy, a tanár szerint neki megfelelő pályára.

E kis dolgozatban foglaltak mind megvitatásra, tisztázásra szorulnak.

Különösen fontos lenne, ha minél többen közölnék gondolataikat és tapasztalataikat a kiváló tanulók irányításáról, neveléséről.

FARAGÓ TIBOR.

## Forrásmunkák:

1. Ludvig Bieberbach: *Sturten mathematischen Schaffens.* Berlin. 1934.
2. Boda István: *Bevezető a lélektanba.* Budapest. 1934.
2. Boda István: *A személyiség végső biopszichés jegyei.* Magyar Pszichológiai Szemle, 1934.
2. David Lajos: *A két Bolyai élete és munkássága.* Budapest. 1923.
3. David Lajos: *Mi a matematika?* Búvár, II. évf. 4. szám. 1936.
3. David Lajos: *Gauss.* Lásd: Nagy József: *Kiváló matematikusok és fizikusok.* Budapest. 1927.
4. Karl Dunccker: *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin. 1935.

8. H. F e h r r: Enquête de „L' enseignement mathématique” sur la méthode de travail des mathématiciens. Paris—Geneve. 1912.
9. Valentin H a e c k e r und Theodor Z i e h e n: Beitrag zur Lehre von der Vererbung und Analyse der zeichnerischen und mathematischen Begabung, insbesondere mit Bezug auf die Korrelation zur musikalischen Begabung. Sonderabdruck aus: „Zeitschrift für Psychologie”. 1931.
10. Joseph H i m p s e l: Zur Frage der mathematischen Sonderbegabung in der höheren Schule. Archiv für die Gesamte Psychologie 99 Bänd 3. u. 4. Heft, 1937.
11. D. Katz: Psychologie und mathematischer Unterricht Leipzig und Berlin. 1913.
12. K o h n — S c h a c h t e r: Zahlenreihentest. Zeitschrift für angewandte Psychologie. Bänd 26. Leipzig. 1926.
13. V. K o m m e r e l l: Über mathematische Begabung. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie. März. 1928.
14. K o r o n c z y Teofil: A matematika filozófiájának vázlat. Székesfehérvár. 1935.
15. Kürs c liák József: Matematikai versenytételek. Szeged. 1929.
16. Werner L i e d l o f f: Beiträge zur Psychologie der mathematischen Schulbegabung. Jenaer Beiträge zur Jugend und Erziehungspsychologie. Langensalza. 1928.
17. M á r k u s Artúr: A matematikai képesség lélektana. Szeged. 1937.
18. M i t r o v i c s Gyula: A neveléstudomány alapvonalai. Debrecen—Budapest. 1933.
19. M i t r o v i c s Gyula: Az egyéni nevelés főbb szempontjai. Debrecen. 1917.
20. P a j o r Elemér: Az egyenlet-felállítás nehézségei a pedagógiai lélektan megvilágításában. Nevelésügyi Szemle II. évfolyam 1. szám. 1938.
21. Henri P o i n c a r é: L'invention mathématique. Paris, Geneve. 1912.
22. Fritz R i t t e r: Die mathematische Begabung und die Schule. Mainz. 1914.
23. Gustav R o s e: Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechnenunterricht. Leipzig. 1928.
24. W. J. R u l l m a n n: Die Methoden der pädagogischen Psychologie. Halle. 1930.
25. S á r k ö z y Pál: Cauchy. Lásd Nagy József: Kiváló matematikusok és fizikusok. Budapest. 1927.
26. S o m o g y i József: Tehetség és eugenika. Budapest. 1934.
27. S z e l i á n s z k y Ferenc: A hibakutalás neveléslélektani problémái. Szeged. 1938.
28. V á r k o n v i Hildebrand: Bevezetés a neveléslélektanba. Budapest. 1937.
29. V á r k o n y i Hildebrand: A gyermekkor lélektana. Szeged. 1938.
30. V á r k o n v i Hildebrand: Az alaki képzés és átvitel kérdése. Budapest. 1938.
31. Aloys W e n z l: Theorie der Begabung. Entwurf einer Intelligenzkunde. Leipzig. 1934.
32. W e s z e l y Ödön: A korszerű nevelés alapelvei. Budapest. 1935.
33. Theodor Z i e l i e n: Über das Wesen der Beanlagung. Langensalza. 1929.